JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Observations sur un Mémoire de M. Ivory.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 169-174.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A12_0>

OBSERVATIONS

Sur un Mémoire de M. Ivory ;

Par Joseph LIOUVILLE.

1. Dans les *Transactions philosophiques* (année 1838), on trouve un Mémoire de M. Ivory sur l'équilibre des ellipsoïdes homogènes et liquides dont les molécules s'attirent en raison inverse du carré des distances et tournent autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. L'auteur rappelle d'abord le théorème remarquable de M. Jacobi, en vertu duquel les trois axes de ces ellipsoïdes peuvent être inégaux; il cite également la démonstration que j'en ai donnée dans le XXIII^{e} cahier du *Journal de l'École Polytechnique;* puis il discute les deux équations transcendantes dont la solution du problème dépend, équations qui lient entre elles les excentricités des sections principales et la force centrifuge.

La question intéressante dont s'est occupé M. Ivory m'avait été autrefois proposée par M. Poisson ; mais d'autres travaux ne m'ayant pas permis de la traiter avec tout le soin qu'elle mérite, j'avais cru devoir l'abandonner. Cependant j'avais obtenu quelques résultats simples qui se trouvent en contradiction directe avec les conclusions précises de l'illustre géomètre anglais. J'espère qu'on me pardonnera de publier aujourd'hui ces résultats, tout incomplets qu'ils sont.

2. Conservons les notations dont j'ai fait usage dans le XXIII^{e} cahier du *Journal de l'École Polytechnique.* L'une des deux équations

transcendantes, dont nous venons de parler, sera

$$\text{(I)}\qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2x^2)\,dx}{\mathrm{H}^3} = 0,$$

H représentant le radical

$$\sqrt{(1+\lambda^2x^2)(1+\lambda'^2x^2)},$$

et les quantités λ^2, λ'^2 étant liées aux demi-axes k, k', k'', par les relations

$$\lambda^2 = \frac{k'^2-k^2}{k^2},\quad \lambda'^2 = \frac{k''^2-k^2}{k^2}.$$

L'équation (I) exige que l'on ait

$$\lambda^2\lambda'^2 > 1,\quad \text{d'où}\quad \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k'^2} + \frac{1}{k''^2};$$

car si le produit $\lambda^2\lambda'^2$ était < 1, les éléments de l'intégrale qui compose son premier membre seraient tous de même signe, et ne pourraient avoir zéro pour somme. Ainsi les axes $2k'$, $2k''$ de l'équateur sont plus grands que l'axe $2k$ autour duquel le mouvement s'effectue : par suite les quantités λ^2, λ'^2 sont positives.

Représentons par λ, λ' les valeurs absolues des racines carrées de λ^2, λ'^2, et soit, pour fixer les idées, $\lambda > \lambda'$. Posons ensuite

$$\lambda\lambda' = p,\qquad \lambda - \lambda' = \tau:$$

on aura $p > 1$, $\tau > 0$, et l'équation (1) prendra la forme

$$(1)\qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Elle déterminera la valeur de p en fonction de τ^2. Lorsqu'on attribue à τ^2 une valeur positive quelconque, il existe toujours au moins une valeur de p correspondante, puisqu'en faisant $p=1$ et $p=\infty$ dans le premier membre de l'équation (1), on trouve évidemment deux résultats de signes contraires.

3. Maintenant, comme p varie lorsque l'on fait varier τ^2, il est naturel de se demander, 1°. S'il existe pour p une limite supérieure; 2°. Si la plus petite valeur de p est égale à 1 ou $>$ 1.

M. Ivory, dans son Mémoire, arrive à cette conclusion que la valeur de p reste toujours comprise entre l'unité et une certaine limite supérieure p_0, qui répond à $\tau = 0$, en sorte que pour des valeurs de τ^2 croissantes depuis 0 jusqu'à ∞, p va en décroissant depuis p_0 jusqu'à l'unité.

Mais je vais montrer au contraire, 1°. Que p_0 est la plus petite et non pas la plus grande valeur de p; 2°. Que p n'a pas de limite supérieure et peut croître jusqu'à l'infini.

4. Étudions en premier lieu l'équation qu'on obtient lorsqu'on fait $\tau = 0$ dans l'équation (1) : celle-ci devenant alors

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)\,dx}{(1+px^2)^3} = 0,$$

l'intégration dont son premier membre dépend peut être effectuée : on obtient ainsi

$$\text{arc tang } \sqrt{p} = \frac{3\sqrt{p} + 13p\sqrt{p}}{3 + 14p + 3p^2},$$

et l'on constate aisément l'existence d'une racine p, peu différente de 2 : c'est la quantité désignée ci-dessus par p_0.

L'équation (2) n'a pas de racine réelle autre que $p = p_0$. Pour le prouver, posons $\sqrt{p} = \text{tang}\,\gamma$: les limites de p étant 1 et ∞, celles de γ seront $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$; et nous aurons

$$\gamma = \frac{(3\cos^2\gamma + 13\sin^2\gamma)\sin\gamma\cos\gamma}{3(\sin^4\gamma + \cos^4\gamma) + 14\sin^2\gamma\cos^2\gamma}:$$

en observant que $\sin^4\gamma + \cos^4\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma\cos^2\gamma$, et introduisant les lignes trigonométriques des angles 2γ, 4γ, il nous viendra

$$(3) \qquad \gamma(6 + 4\sin^2 2\gamma) - 8\sin 2\gamma + \frac{5\sin 4\gamma}{2} = 0.$$

Or la dérivée, par rapport à γ, du premier membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$8\gamma \sin 4\gamma + 6 + 4(1 - \cos^2 2\gamma) - 16 \cos 2\gamma + 10(2\cos^2 2\gamma - 1),$$

c'est-à-dire,

$$8\gamma \sin 4\gamma - 16 \cos 2\gamma (1 - \cos 2\gamma),$$

ou

$$8\gamma \sin 4\gamma - 32 \cos 2\gamma \,.\, \sin \gamma \cos \gamma \,.\, \operatorname{tang} \gamma,$$

ou enfin

$$8 \sin 4\gamma (\gamma - \operatorname{tang} \gamma):$$

entre les limites $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, elle est évidemment positive comme résultant du produit de deux facteurs négatifs. Donc le premier membre de l'équation (3) est une fonction croissante de γ, qui ne peut s'annuler qu'une fois.

Par suite en nommant V_0 le premier membre de l'équation (2), V_0 sera une fonction de p qui ne pourra aussi s'annuler qu'une fois.

J'ajoute que la fonction V_0 en s'évanouissant passe du positif au négatif: pour toute valeur de $p < p_0$, on a $V_0 > 0$, mais dès que p surpasse p_0, on a $V_0 < 0$.

5. Soit $\tau^2 = \sigma$, et

$$V = \int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)(1 - p^2x^2)\, dx}{[(1 + px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{3}{2}}};$$

V sera précisément le premier membre de l'équation (1). La valeur de la dérivée partielle $\frac{dV}{d\sigma}$ est exprimée par

$$\frac{dV}{d\sigma} = -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{x^4(1 - x^2)(1 - p^2x^2)\, dx}{[(1 + px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{5}{2}}}.$$

Je la multiplie par $\sigma + (1 + p)^2$, puis je l'ajoute à celle de V multipliée elle-même par $\frac{3}{2}$: après les réductions convenables, je trouve

$$(4) \qquad [\sigma + (1 + p)^2] \frac{dV}{d\sigma} + \frac{3}{2} V = \frac{3}{2} L^2,$$

L^2 désignant l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^2(1 - x^2)^2 (1 - p^2x^2)^2\, dx}{[(1 + px^2)^2 + \sigma x^2]^{\frac{5}{2}}},$$

dont la valeur est essentiellement positive.

L'équation (4) peut être mise sous la forme

$$(5)\qquad \frac{d.[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V}{d\sigma}=\frac{3}{2}[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{1}{2}}L^2.$$

En l'intégrant, désignant comme ci-dessus, par V_0 la valeur de V qui répond à $\sigma=0$, et posant $\frac{3}{2}[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{1}{2}}L^2=S^2$, elle fournit

$$(6)\qquad [\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V=(1+p)^3V_0+\int_0^\sigma S^2d\sigma.$$

L'équation (6) conduit à plusieurs conséquences utiles.

D'abord, on voit que les valeurs de p qui rendent $V_0>0$, rendent *à fortiori* $V>0$. Ainsi les racines p de l'équation (1) ont pour limite inférieure p_0.

On voit ensuite que le produit

$$[\sigma+(1+p)^2]^{\frac{3}{2}}V$$

est une fonction croissante de σ, et que par conséquent pour une valeur donnée de p, il existe au plus une valeur de σ satisfaisant à l'équation (1).

6. Pour montrer qu'à toute valeur de $p>p_0$ répond une valeur de σ vérifiant l'équation (1), j'observe qu'en faisant $\sigma=0$, V se réduit à V_0 et prend une valeur négative : il suffira donc de prouver que pour de très grandes valeurs de σ ou de τ, la fonction V est positive.

Le produit

$$x^2(1-x^2)(1-p^2x^2)$$

est égal à

$$x^2-x^4[1+p^2(1-x^2)].$$

Ainsi en posant

$$M=\int_0^1\frac{x^2dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$N=\int_0^1\frac{x^4[(1+p^2(1-x^2)]\,dx}{[(1+px^2)^2+\tau^2x^2]^{\frac{3}{2}}},$$

on a $V=M-N$. Les éléments des intégrales M, N sont tous positifs, et la variable x reste comprise entre 0 et 1 : d'après cela on trouve aisément

$$M > \int_0^1 \frac{x^2 dx}{[(1+p)^2 + \tau^2 x^2]^{\frac{3}{2}}},$$
$$N < \int_0^1 \frac{x^4 (1+p^2)\, dx}{\tau^3 x^3},$$

c'est-à-dire,

$$N < \frac{1+p^2}{2\tau^3}$$

et

$$M > \frac{1}{\tau^3} \log\left[\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right] - \frac{1}{\tau^2\sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}:$$

cette dernière inégalité entraîne *à fortiori* la suivante :

$$M > \frac{1}{\tau^3} \log\left[\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right] - \frac{1}{\tau^3};$$

par suite on a

$$V > \frac{1}{\tau^3}\left[\log\left(\frac{\tau + \sqrt{(1+p)^2+\tau^2}}{1+p}\right) - \frac{p^2+3}{2}\right],$$

ce qui donne $V > 0$ pour des valeurs de τ suffisamment grandes.

Ainsi pour toute valeur de p supérieure à p_0, il existe une seule valeur de τ^2 satisfaisant à l'équation (1).

Cette conclusion est tout-à-fait contraire à celle de M. Ivory ; mais cela n'a rien d'étonnant, car M. Ivory admet que lorsqu'on a $V=0$, la dérivée $\frac{dV}{d\tau}$ ou $\frac{dV}{d(\tau)^2}$ est négative ; or l'équation (4) nous montre au contraire que cette dérivée est positive pour toutes les valeurs de p et de σ qui donnent $V=0$.